MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022
Filiera tehnologică – toate profilurile

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Clasa a IX–a

Subiectul 1.
Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ cu termeni pozitivi.

a) Calculați suma primilor 30 de termeni ai progresiei aritmetice dacă $a_{11}+a_{14}+a_{17}+a_{20}=182$.

b) Știind că $S=1+\frac{a_2}{\sqrt{a_1a_3}}+\frac{a_3}{\sqrt{a_2a_4}}+\frac{a_4}{\sqrt{a_3a_5}}+...+\frac{a_n}{\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}}$ cu $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$, demonstrați că $S\ge n$.

Subiectul 2.
Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+1$ și numărul $S_n=\frac{1}{f(0)\cdot f(1)}+\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+...+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}$, unde *n* este un număr natural nenul.

a) Verificați egalitatea: $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$, pentru orice număr natural nenul *n*.

b) Demonstrați că $S_n=\frac{n}{4n+1}$, unde *n* este un număr natural nenul.

c) Fie "$\circ$" operația de compunere a funcțiilor. Arătați că $\left(\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{de\ n\ ori}\right)(x)=4^n x+4^{n-1}+4^{n-2}+...+4+1$, pentru orice număr natural $n\ge 2$ **.**

Subiectul 3.
Se consideră triunghiul *ABC*, punctul *D* fiind mijlocul laturii *AC* și punctul *M* astfel încât $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

a) Arătați că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

c) Arătați că dreptele *MD* și *AB* sunt paralele.

Subiectul 4.
Pe o suprafață plană, un robot sare din punctul A_1 în punctul A_2 , lungimea saltului (distanța de la A_1 la A_2) fiind egală cu 3 cm. El continuă să sară astfel încât lungimea fiecărei sărituri este de două ori mai mare decât precedenta.

a) Care este lungimea traseului parcurs de robot după 10 sărituri?

b) Poate să ajungă robotul după un număr de sărituri iar în punctul A_1 ?

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică – toate profilurile

Clasa a X–a

Subiectul 1.

a) Demonstraţi că $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$ este număr natural, oricare ar fi numerele reale *a, b, c* strict pozitive şi diferite de 1 .

b) Rezolvaţi ecuaţia $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{n-1} n = 10$, dacă ştim că $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$.

Subiectul 2.

a) Se dau cifrele 0, 1, 2, 3, 4. Câte numere de 3 cifre distincte se pot scrie cu aceste cifre? Dintre numerele găsite anterior, câte sunt divizibile cu 10?

b) Determinați rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{y}}{x}}\right)^{43}$ pentru care x şi y au exponenți egali.

Subiectul 3.

Se dau numerele complexe $z_1 = -2 + 2i$, $z_2 = 2 + 2i$.

a) Demonstraţi că $z_1^{2022} + z_2^{2022} = 0$.

b) Demonstrați că originea O a reperului cartezian (xOy) se află pe mediatoarea segmentului $[AB]$, unde A şi B sunt afixele numerelor complexe z_1 , respectiv z_2 .

Subiectul 4.

Se dau funcţiile $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}, f(t) = -2^{\frac{t}{10}-2}$ şi $g:[0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(t) = \log_3(t+1)$ care reprezintă legile după care scad, respectiv se măresc temperaturile exprimate în grade Celsius, în interiorul unei camere frigorifice în funcție de timpul t, exprimat în minute, atunci când instalația de răcire a acesteia funcționează sau este oprită. Știind că în momentul punerii în funcțiune a instalației, în interiorul camerei frigorifice erau 12ºC, determinați:

a) Temperatura din interiorul camerei frigorifice după 70 de minute de funcționare continuă a instalației frigorifice.

b) Dacă după cele 70 de minute de funcționare, instalația de răcire se oprește, în cât timp temperatura din interiorul camerei frigorifice ajunge la $-16^\circ C$?

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică – toate profilurile
Clasa a XI–a

Subiectul 1.

Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}\frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2}\\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2}\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

a) Arătaţi că $A(a)\cdot A(b)=A(ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Determinaţi $A^n(a),\ n\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstraţi că $\det A(2)+\det A^2(2)+\det A^3(2)+\ldots+\det A^{2022}(2)<2^{2023}$.

Subiectul 2.

Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

a) Stabiliți D, domeniul maxim de definiție a funcției f.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^x$.

Subiectul 3.

Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)},\ x\in(0,\infty)$.

b) Demonstraţi că $f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(2022)\in(0,1)$.

c) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=e^{f(x)}$, ştiind că aceasta trece prin punctul $A(-1,0)$.

Subiectul 4.

O masă de biliard este reprezentată schematic într-un reper cartezian *(xOy)* printr-un dreptunghi *OABC* astfel încât $A\in Oy,\ C\in Ox,\ OA=2a,\ OC=a$ şi $a\in(0,\infty)$.

a) Determinaţi coordonatele punctului *P* în care este situată o bilă albă ştiind că acesta se află la distanţa $\frac{a}{2}$ faţă de *AB* şi la distanţa $\frac{a}{2}$ faţă de *BC*.

b) Determinaţi coordonatele punctului *M* de pe latura *BC* a mesei, în care trimitem bila *P* astfel încât ea să ricoşeze în buzunarul din punctul *O*.

c) Determinaţi cel mai mic număr întreg *a* pentru care aria triunghiului determinat de poziţia iniţială a bilei, punctul *M* şi buzunarul *O* este un număr natural.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică – toate profilurile

Clasa a XII–a

Subiectul 1.

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x * y = -2xy + 4x + 4y - 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că legea”$*$” este asociativă și determinați elementul neutru al legii.

b) Determinați numerele întregi x pentru care $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{2022 \text{ de ori}} = x$.

c) Pe o tablă sunt scrise numerele de la 0 la 31. Un elev șterge la întâmplare două numere a și b și în locul lor scrie rezultatul compunerii lui a cu b după legea ”$*$”. Aflați ce număr se va scrie ultimul pe tablă dacă elevul repetă cele prezentate până când pe tablă rămâne un singur element.

Subiectul 2.

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(t) = -\frac{t}{3}A + \frac{t^2}{3}B,\ t \in \mathbb{R}$. Considerăm mulțimea $G = \{M(t) / t \in \mathbb{R}^*\}$.

a) Determinați matricele A^2 și $A \cdot B$.

b) Arătați că mulțimea G este parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor.

c) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian, unde “ $\cdot$ ” reprezintă înmulțirea matricilor.

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Să se determine numărul real $a > 1$ astfel încât $\int_1^a \left(f(x) - x^3\right) \cdot e^x\,dx = 6e^a$

c) Să se calculeze $\int_0^1 \left(3x^2 + 3\right) \cdot f^{2022}(x)\,dx$.

Subiectul 4.

Într-un vas de cultură sunt, la momentul $t = 0$, 1000 de bacterii. S-a observat că funcția $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$, definită prin $f(t) =$ numărul de bacterii din vas la momentul t, satisface relația $f'(t) = 0{,}02 \cdot t \cdot f(t)$, pentru orice $t \geq 0$, unde f' reprezintă derivata funcției f.

a) Determinați funcția f cu această proprietate.

b) Demonstrați că pentru orice $t \geq 10$ numărul bacteriilor din vas este mai mare decât 2700.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*