INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022
Filiera tehnologică – toate profilurile

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
Clasa a IX –a

Subiectul 1.

Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi.

a) Calculați suma primilor 30 de termeni ai progresiei aritmetice dacă $a_{11}+a_{14}+a_{17}+a_{20}=182$.

b) Ştiind că $S=1+\frac{a_2}{\sqrt{a_1a_3}}+\frac{a_3}{\sqrt{a_2a_4}}+\frac{a_4}{\sqrt{a_3a_5}}+...+\frac{a_n}{\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}}$ cu $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, demonstrați că $S\geq n$.

SOLUŢIE:

a) $S_{30}=\frac{(2a_1+29r)\cdot 30}{2}$ 1p

$a_{11}+a_{14}+a_{17}+a_{20}=182 \Leftrightarrow 2a_1+29r=91$ 2p

Finalizare $S_{30}=1365$ 1p

b) Din inegalitatea mediilor $\Rightarrow \frac{a_i}{\sqrt{a_{i-1}a_{i+1}}}=\frac{\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}}{\sqrt{a_{i-1}a_{i+1}}}=\frac{m_a}{m_g}\geq 1$ 2p

Se obține $S\geq 1+\underbrace{(1+1+...+1)}_{de\ n-1\ ori}=n\Rightarrow S\geq n$ 1p

Subiectul 2.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+1$ și numărul $S_n=\frac{1}{f(0)\cdot f(1)}+\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+...+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}$, unde n este un număr natural nenul.

a) Verificați egalitatea: $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

b) Demonstrați că $S_n=\frac{n}{4n+1}$, unde n este un număr natural nenul.

c) Fie "$\circ$" operația de compunere a funcțiilor. Arătați că $\left(\underbrace{f\circ f\circ ...\circ f}_{de\ n\ ori}\right)(x)=4^nx+4^{n-1}+4^{n-2}+...+4+1$, pentru orice număr natural $n\geq 2$.

SOLUŢIE:

a) Verificarea egalității 1p

b) $\frac{1}{f(i-1)\cdot f(i)}=\frac{1}{(4i-3)(4i+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4i-3}-\frac{1}{4i+1}\right)$ pentru $i=\overline{1,n}$ 2p

Însumează cele n relații și se obține $S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4n+1}\right)\Leftrightarrow S_n=\frac{n}{4n+1}$ 2p

c) Aplică inducția matematică . Etapa verificării, pentru *n=2*....................1p

Etapa demonstrației și concluzia 1p

Subiectul 3.

Se consideră triunghiul ABC, punctul D fiind mijlocul laturii AC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

a) Arătați că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$.

b) Demonstrați că $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

c) Arătați că dreptele MD și AB sunt paralele.

SOLUȚIE:

a) D = milocul segmentului $AC \Rightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ 1p

$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$ 1p

b) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$. Din $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}$ 2p

c) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ 1p

Obține $3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+2\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ 1p

Finalizează $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{BA}$ coliniari, deci $MD \parallel AB$ 1p

Subiectul 4.

Pe o suprafață plană, un robot sare din punctul A_1 în punctul A_2, lungimea saltului (distanța de la A_1 la A_2) fiind egală cu 3 cm. El continuă să sară astfel încât lungimea fiecărei sărituri este de două ori mai mare decât precedenta.

a) Care este lungimea traseului parcurs de robot după 10 sărituri?

b) Poate să ajungă robotul după un număr de sărituri iar în punctul A_1?

SOLUȚIE:

a) Notând $A_1A_2=x=3cm$ avem $A_1A_2=x,\ A_2A_3=2x,\ A_3A_4=2^2x\ ,...,A_{n-1}A_n=2^{n-2}x$ 1p

$A_1A_2+A_2A_3+...+A_{10}A_{11}=x+2x+2^2x+...+2^9x=\left(2^{10}-1\right)\cdot 3=3069$ cm 2p

b) $\left|\overrightarrow{A_1A_n}\right|=\left|\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\right|\le\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|+\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right|+...+\left|\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\right|$ 2p

Dacă robotul s-ar întoarce în A_1, atunci $A_nA_1=2^{n-1}x$ și rezultă

$2^{n-1}x\le x+2x+2^2x+...+2^{n-2}x \Leftrightarrow 2^{n-1}x\le\left(2^{n-1}-1\right)x$ 1p

Se obține $x\le 0$, ceea ce este fals, deci robotul nu poate ajunge din nou în A_1 ....1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022
Filiera tehnologică – toate profilurile

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X -a

Subiectul 1.

a) Demonstrați că $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$ este număr natural, oricare ar fi numerele reale *a, b, c* strict pozitive şi diferite de 1 .

b) Rezolvați ecuaţia $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{n-1} n = 10$, dacă ştim că $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$.

SOLUŢIE:

a) Se transformă în baza *e* sau în altă bază $\Rightarrow \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln c}{\ln b} \cdot \frac{\ln a}{\ln c} = 1$ 3p

b) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{n-1} n = 10 \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot \frac{\ln 4}{\ln 3} \cdot \frac{\ln 5}{\ln 4} \cdot \ldots \cdot \frac{\ln n}{\ln(n-1)} = 10$ 2p

Obține $\log_2 n = 10$ 1p

Finalizează $n = 2^{10}$ ce verifică condițiile din datele problemei....................................1p

Subiectul 2.

a) Se dau cifrele 0, 1, 2, 3, 4. Câte numere de 3 cifre distincte se pot scrie cu aceste cifre? Dintre numerele găsite anterior, câte sunt divizibile cu 10?

b) Determinați rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{y}}{x}}\right)^{43}$ pentru care *x* şi *y* au exponenți egali.

SOLUŢIE:

a) A_5^3 = numărul aranjărilor de 3 cifre distincte , A_4^2 = numărul aranjărilor cu 0 pe prima poziție 1p

$A_5^3 - A_4^2 = 48$ numere de trei cifre distincte 1p

Numerele divizibile cu 10 sunt în număr de $A_4^2 = 12$ 1p

b) $\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt[3]{y}}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{9}}, \sqrt{\frac{\sqrt{y}}{x}} = y^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ 1p

Termenul general este $T_{k+1} = (-1)^k C_{43}^k \cdot x^{\frac{86-5k}{6}} \cdot y^{\frac{13k-172}{36}}$ 2p

Egalând exponenții lui *x* și *y* , se obține $k = 16 \Rightarrow T_{17} = -C_{43}^{16} \cdot x \cdot y$ este termenul cerut 1p

Subiectul 3.

Se dau numerele complexe $z_1 = -2+2i$, $z_2 = 2+2i$.

a) Demonstrați că $z_1^{2022} + z_2^{2022} = 0$.

b) Demonstrați că originea O a reperului cartezian (xOy) se află pe mediatoarea segmentului $[AB]$, unde A și B sunt afixele numerelor complexe z_1, respectiv z_2.

SOLUȚIE:

a) $z_1^{2022} = (-2+2i)^{2022} = 2^{2022}(-1+i)^{2022} = 2^{3033}i$ 1p

$z_2^{2022} = (2+2i)^{2022} = 2^{2022}(1+i)^{2022} = -2^{3033}i$ 1p

Finalizează $z_1^{2022} + z_2^{2022} = 0$ 1p

b) Reprezentarea geometrică a punctelor A şi B 1p

Condiția ca punctul O să fie pe mediatoarea segmentului AB este ca el să fie egal departat de capetele segmentului, adică $OA = OB$ 1p

$OA = |z_0 - z_A| = 2\sqrt{2}$ 1p

$OB = |z_0 - z_B| = 2\sqrt{2}$ 1p

Subiectul 4.

Se dau funcțiile $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}, f(t) = -2^{\frac{t}{10}-2}$ și $g:[0,\infty) \to \mathbb{R}, g(t) = \log_3(t+1)$ care reprezintă legile după care scad, respectiv se măresc temperaturile exprimate în grade Celsius, în interiorul unei camere frigorifice în funcție de timpul t, exprimat în minute, atunci când instalația de răcire a acesteia funcționează sau este oprită. Știind că în momentul punerii în funcțiune a instalației, în interiorul camerei frigorifice erau 12ºC, determinați:

a) Temperatura din interiorul camerei frigorifice după 70 de minute de funcționare continuă a instalației frigorifice.

b) Dacă după cele 70 de minute de funcționare, instalația de răcire se oprește, în cât timp temperatura din interiorul camerei frigorifice ajunge la $-16^\circ C$?

SOLUȚIE:

a) Când porneşte instalatia frigorifică, temperatura scade, deci variaţia temperaturii este dată de funcţia f 1p

După 70 de minute de funcţionare temperatura va fi $T = 12 + f(70) = 12 - 2^5 = -20^\circ C$ 2p

b) Dacă instalaţia de răcire se opreşte, temperatura în camerei frigorifice începe să crească deci variaţia acesteia va fi dată de funcţia g 1p

După oprirea instalaţiei, temperatura creşte pornind de la -20° (după cum am calculat la punctul a)) .

Se obține $-20 + g(t) = -16 \Leftrightarrow g(t) = 4 \Leftrightarrow \log_3(t+1) = 4$ 2p

Obține $t = 80$ minute 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022
Filiera tehnologică – toate profilurile

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
Clasa a XI -a

Subiectul 1.

Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}\frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2}\\ \frac{a-1}{2} & \frac{a+1}{2}\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

a) Arătaţi că $A(a)\cdot A(b)=A(ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Determinaţi $A^n(a),\ n\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstraţi că $\det A(2)+\det A^2(2)+\det A^3(2)+...+\det A^{2022}(2)<2^{2023}$.

SOLUŢIE:

a) Demonstrează $A(a)\cdot A(b)=A(ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 2p

b) Deduce că $A^n(a)=A(a^n),\ \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ şi $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 1p

Demonstrează prin inducție că $A^n(a)=A(a^n), \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ şi $\forall n\in\mathbb{N}^*$ 1p

c) Din $\det A(a)=a \Rightarrow \det A^n(a)=a^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ 1p

Obține $\det A(2)+\det A^2(2)+\det A^3(2)+...+\det A^{2022}(2)=2+2^2+2^3+...+2^{2022}$ 1p

Finalizare $\det A(2)+\det A^2(2)+\det A^3(2)+...+\det A^{2022}(2)=2^{2023}-2<2^{2023}$ 1p

Subiectul 2.

Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

a) Stabiliți *D*, domeniul maxim de definiție a funcției *f*.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul de abscisă $x_0=2$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^x$.

SOLUŢIE:

a) Din condiția $\frac{x-1}{x+1}\geq 0$ se obține $D=(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$ 1p

b) Determină $f'(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{x}{(x+1)^2}, x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ 2p

Determină $f'(2)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$ şi $f(2)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 1p

Obține ecuația tangentei $5\sqrt{3}x-9y-4\sqrt{3}=0$ 1p

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}}$ 1p

$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1+\sqrt{x^2-1}}}=e^{-1}$ 1p

Subiectul 3.

Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}$, $x\in(0,\infty)$.

b) Demonstraţi că $f'(1)+f'(2)+...+f'(2022)\in(0,1)$.

c) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=e^{f(x)}$, ştiind că aceasta trece prin punctul $A(-1,0)$.

SOLUȚIE:

a) Obține $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}$, $x\in(0,\infty)$ 1p

b) Din $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ 1p

Se obține $f'(1)+f'(2)+...+f'(2022)=1-\frac{1}{2023}$ 1p

Finalizează $f'(1)+f'(2)+...+f'(2022)=\frac{2022}{2023}\in(0,1)$ 1p

c) Determină $g(x)=\frac{x}{x+1}$ și $g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$, $x\in(0,\infty)$ 1p

Ecuaţia tangentei d în punctul de abscisă $x_0\in(0,\infty)$ este $y-\frac{x_0}{x_0+1}=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$ 1p

Din $A(-1,0)\in d$, obţine $x_0=1$ şi găseşte $(d):x-4y+1=0$ 1p

Subiectul 4.

O masă de biliard este reprezentată schematic într-un reper cartezian *(xOy)* printr-un dreptunghi *OABC* astfel încât $A\in Oy$, $C\in Ox$, $OA=2a$, $OC=a$ şi $a\in(0,\infty)$.

a) Determinaţi coordonatele punctului *P* în care este situată o bilă albă ştiind că acesta se află la distanţa $\frac{a}{2}$ faţă de *AB* şi la distanţa $\frac{a}{2}$ faţă de *BC*.

b) Determinaţi coordonatele punctului *M* de pe latura *BC* a mesei, în care trimitem bila *P* astfel încât ea să ricoşeze în buzunarul din punctul *O*.

c) Determinaţi cel mai mic număr întreg *a* pentru care aria triunghiului determinat de poziţia iniţială a bilei, punctul *M* şi buzunarul *O* este un număr natural.

SOLUȚIE:

a) Determină punctele $A(0,2a),C(a,0),B(a,2a)$ 1p

Deduce $P\left(\frac{a}{2},\frac{3a}{2}\right)$ 1p

b) Din $M\in BC\Rightarrow M(a,y),y>0$ 1p

Dacă $\{N\}=PM\cap BC\Rightarrow N(2a,0)$ 1p

Din *P, M, N* coliniare rezultă $\begin{vmatrix}\frac{a}{2} & \frac{3a}{2} & 1\\ a & y & 1\\ 2a & 0 & 1\end{vmatrix}=0$ şi obţine *M(a,a)* 1p

c) Calculează $\Delta=\begin{vmatrix}\frac{a}{2} & \frac{3a}{2} & 1\\ a & a & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-a^2$ 1p

Aria triunghiului *POM* este $A=a^2/2$ şi obţine $a=2$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
26 martie 2022

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică – toate profilurile
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
Clasa a XII –a

Subiectul 1.
Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x * y = -2xy + 4x + 4y - 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că legea"$*$" este asociativă și determinați elementul neutru al legii.
b) Determinați numerele întregi x pentru care $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{2022 \text{ de ori}} = x$.
c) Pe o tablă sunt scrise numerele de la 0 la 31. Un elev șterge la întâmplare două numere a și b și în locul lor scrie rezultatul compunerii lui a cu b după legea "$*$". Aflați ce număr se va scrie ultimul pe tablă dacă elevul repetă cele prezentate până când pe tablă rămâne un singur element.

SOLUȚIE:

a) Verifică asociativitatea 1p
Determină elementul neutru $e = \dfrac{3}{2} \in \mathbb{R}$ 1p

b) Deduce că $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ n\ ori} = (-2)^{n-1}(x-2)^n + 2,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și demonstrează prin inducție 1p
$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{x \text{ de } 2022 \text{ de ori}} = x \Leftrightarrow (-2)^{2021}(x-2)^{2022} - (x-2) = 0$. Se obține $x - 2 \in \left\{-\dfrac{1}{2}, 0\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{3}{2}, 2\right\}$ 1p
Cum $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2$ 1p

c) Demonstrează că $x * 2 = x, \forall x \in \mathbb{R}$ și $2 * y = y, \forall y \in \mathbb{R}$ 1p
Argumentează de ce 2 este ultimul număr scris pe tablă....................1p

Subiectul 2.
Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(t) = -\dfrac{t}{3}A + \dfrac{t^2}{3}B,\ t \in \mathbb{R}$. Considerăm mulțimea $G = \left\{M(t) / t \in \mathbb{R}^*\right\}$.

a) Determinați matricele A^2 și $A \cdot B$.
b) Arătați că mulțimea G este parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor.
c) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian, unde "$\cdot$" reprezintă înmulțirea matricilor.

SOLUȚIE:

a) Obține $A^2 = 3A$ și $A \cdot B = O_3$ 2p

b) $M(t) \cdot M(u) = \dfrac{tu}{9}A^2 - \dfrac{tu^2}{9}AB - \dfrac{ut^2}{9}BA + \dfrac{(tu)^2}{9}B^2$, cu $t, u \in \mathbb{R}^*$ 1p
Se obține $M(t) \cdot M(u) = M(-tu)$ și cum $t, u \in \mathbb{R}^* \Rightarrow tu \in \mathbb{R}^*$, deci G este parte stabilă 1p

c) Verifică asociativitatea și comutativitatea 1p
Determină elementul neutru $M(-1) = I_3 \in G$ 1p
Orice element $M(t) \in G$ este simetrizabil, simetricul este $M\left(\dfrac{1}{t}\right) \in G$ cu $t \in \mathbb{R}^*$ 1p

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^3-3x^2-1$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Să se determine numărul real $a>1$ astfel încât $\int_1^a (f(x)-x^3)\cdot e^x dx = 6e^a$

c) Să se calculeze $\int_0^1 (3x^2+3)\cdot f^{2022}(x)dx$.

SOLUȚIE:

a) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^3+3x)dx = \frac{7}{4}$ 2p

b) $\int_1^a (f(x)-x^3)\cdot e^x dx = 6e^a \Leftrightarrow \int_1^a 3x\cdot e^x dx = 6e^a \Leftrightarrow \int_1^a x\cdot e^x dx = 2e^a$ 1p

Integrând prin părți, se obține $(a-3)e^a = 0 \Leftrightarrow a=3$ 2p

c) $\int_0^1 (3x^2+3)\cdot f^{2022}(x)dx = \int_0^1 (3x^2+3)\cdot (x^3+3x)^{2022} dx = \int_0^4 t^{2022}dt$, unde $x^3+3x=t$ 1p

Finalizează $\int_0^1 (3x^2+3)\cdot f^{2022}(x)dx = \frac{4^{2023}}{2023}$ 1p

Subiectul 4.

Într-un vas de cultură sunt, la momentul $t=0$, 1000 de bacterii. S-a observat că funcția $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$, definită prin $f(t)=$ numărul de bacterii din vas la momentul t, satisface relația $f'(t)=0,02\cdot t\cdot f(t)$, pentru orice $t\geq 0$, unde f' reprezintă derivata funcției *f*.

a) Determinați funcția *f* cu această proprietate.

b) Demonstrați că pentru orice $t\geq 10$ numărul bacteriilor din vas este mai mare decât 2700.

SOLUȚIE:

a) $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{t}{50} \Rightarrow \int \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \int \frac{t}{50}dt$ 1p

$\ln(f(t)) = \frac{t^2}{100}+c \Rightarrow f(t) = e^{\frac{t^2}{100}+c} = e^{\frac{t^2}{100}}\cdot e^c$ 2p

$f(0)=1000 \Rightarrow e^c = 1000 \Rightarrow f(t) = 1000\cdot e^{\frac{t^2}{100}}$ 1p

b) $f(10)=1000e$ 1p

$e>2,7 \Rightarrow f(10)>2700$ 1p

Cum $t\geq 10$ și *f* este strict crescătoare $\Rightarrow f(t)\geq f(10)=1000e>2700$ 1p