

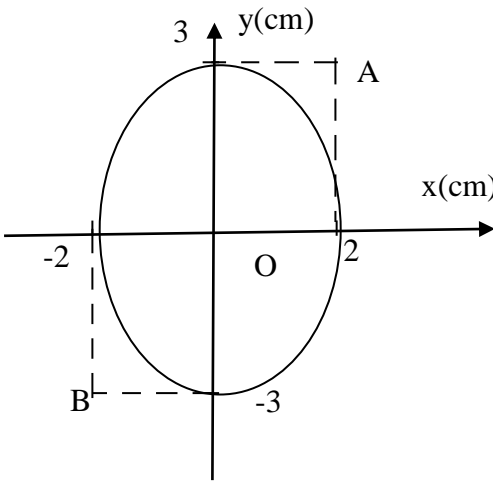
Pagina 1 din 6

Subiect 1.	Parțial	Punctaj
1. Barem subiect 1		10
I.a. Scoțând sistemul din starea de echilibru prin devierea cu un unghi ϕ și apoi lăsându-l liber, avem: $\Delta E_p = - \Delta E_c$	0,25	2
$\Delta E_p = - mgL(1 - \cos\phi) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right)$	0,5	
$\Delta E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 \phi^2 \left(L^2 + \frac{L^2}{9} + \frac{4L^2}{9} \right)$	0,5	
adică $mgL(1 - \cos\phi) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} m \omega^2 \phi^2 \left(L^2 + \frac{L^2}{9} + \frac{4L^2}{9} \right)$	0,25	
Folosind aproximația $1 - \cos\phi \approx \frac{\phi^2}{2}$ obținem $g = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{7}{9} L$	0,25	
adică $T = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{7L}{g}}$	0,25	
b. În sistemul de referință legat de cutie pe lângă câmpul forțelor gravitaționale mai apare și câmpul forțele de inerție.		0,25
acelerația sistemului este: $a = g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)$		0,25
iar $g_{ef} = \frac{\sqrt{G^2 + F_i^2 + 2GF_i \cos(90^\circ + \alpha)}}{m}$	0,5	
$g_{ef} = \sqrt{g^2 + a^2 - 2ag \sin\alpha}$	0,5	
$g_{ef} = g \cos\alpha \sqrt{1 + \mu^2}$	0,25	
$T = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{7L}{g_{ef}}} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{7L}{g \cos\alpha \sqrt{1 + \mu^2}}}$	0,25	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

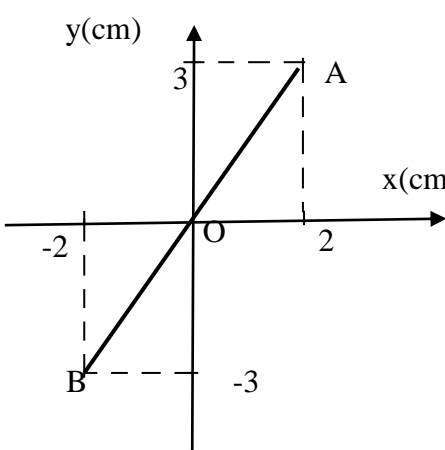
<p>c. Scoțând sistemul din starea de echilibru prin devierea cu un unghi ϕ și apoi lăsându-l liber, avem: $\Delta E_p = -\Delta E_c$</p>	0,25	2
$\Delta E_p = -mgL(1 - \cos\phi) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) - k \left(\frac{L\phi}{2} \right)^2$	0,5	
$\Delta E_c = \frac{m\omega^2\phi^2 \left(L^2 + \frac{L^2}{9} + \frac{4L^2}{9} \right)}{2}$	0,5	
<p>Folosind aproximația $1 - \cos\phi \approx \frac{\phi^2}{2}$ obținem</p> $2mg + \frac{kL}{2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{14}{9} mL$	0,5	
<p>Adică</p> $T = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{28mL}{4mg + kL}}$	0,25	
<p>II.a La echilibru $p = p_0$. Prin devierea sistemului spre dreapta scade volumul și rezultă o forță $F_s = (p' - p_0)(S_1 - S_2)$ care determină revenirea la starea de echilibru. Prin devierea sistemului spre stânga crește volumul și rezultă o forță $F_d = (p_0 - p'')(S_1 - S_2)$ care determină revenirea la starea de echilibru.</p>	1	3
<p>b. Fie x distanța pe care este deviat sistemul spre dreapta, de la poziția de echilibru Volumul dintre pistoane devine: $V' = V - (S_1 - S_2)x$, iar presiunea</p> $p' = \frac{pV}{V'} = \frac{p}{1 - \frac{1}{V}(S_1 - S_2)x} \approx p + \frac{p}{V}(S_1 - S_2)x$	1	
<p>Rezultă:</p> $F = (p' - p)(S_1 - S_2) \approx \frac{p}{V}(S_1 - S_2)^2 x$ $k = \frac{p}{V}(S_1 - S_2)^2; T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \frac{1}{S_1 - S_2} \sqrt{\frac{mV}{p}}$	1	
Oficiu		1

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Subject 2	Parțial	Punctaj
Barem subiect 2		10
<p>I.a) $x = X \cdot \sin \omega t$ $y = Y \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ $\sin \omega t = \frac{x}{X}$ $\frac{y}{Y} = \sin \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \omega t$ $\frac{y}{Y} - \frac{x}{X} \cdot \cos \varphi = \sin \varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{X^2}}$ $\frac{y^2}{Y^2} + \frac{x^2}{X^2} \cdot \cos^2 \varphi - \frac{2xy}{XY} \cdot \cos \varphi + \sin^2 \varphi \cdot \frac{x^2}{X^2} = \sin^2 \varphi$ $\frac{y^2}{Y^2} + \frac{x^2}{X^2} - \frac{2xy}{XY} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi$</p>	1	2
<p>I.b) $X=2, Y=3$ alegem punctul B $x=2\sin \omega t=2$ $y=3\sin(\omega t + \varphi)=-3$ $\omega t=\pi/2 + 2k\pi \Rightarrow \sin(\omega t + \varphi)=-1 \Rightarrow$ $\omega t + \varphi=3\pi/2 + 2k'\pi \Rightarrow$ $\pi/2 + 2k\pi + \varphi=3\pi/2 + 2k'\pi \Rightarrow$ $\varphi=\pi + 2k''\pi=(2k''+1)\pi$ $x = 2 \sin \omega t$ $y = 3 \sin(\omega t + \pi)$</p>	1	2
<p>I.c) $\varphi=\pi/2$ $\frac{y^2}{3^2} + \frac{x^2}{2^2} = 1$</p> 	1	2

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Pagina 4 din 6

<p>$\varphi = 0; \frac{y^2}{3^2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{2xy}{6} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3x}{2}$</p> 	<p>1</p>	
<p>II.a) $B = B_1 + B_2 + B_3 = 0 + \frac{\mu_0 I}{4r} + \frac{\mu_0 I}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I}{4r} \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$, deoarece primul conductor liniar e coliniar cu punctul O, al doilea conductor este un semicerc si din motive de simetrie este doar jumătate din inductia produsă de o spiră în centrul ei, al treilea conductor este jumătate dintr-un conductor liniar infinit in ambele sensuri cu punctul O aflat la distanta r de el.</p>	<p>1</p>	
<p>II.b) $B = B_1 + B_2 = 0 + \frac{\mu_0 I}{8r} + 0 + 0 + \frac{\mu_0 I}{8r} + 0 = \frac{\mu_0 I}{4r}$, similar a) conductorii liniari nu produc câmp în punctul O fiind coliniari cu el, rămân doar cele două arce de un sfert de cerc</p>	<p>1</p>	<p>3</p>
<p>II.c) $B = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} + \frac{\mu_0 I}{4r} + \frac{\mu_0 I}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I}{4r} \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$, similar a) conductorii liniari produc fiecare jumătate dintr-un conductor liniar infinit în ambele sensuri cu punctul O aflat la distanta r de ei, a doua porțiune e un conductor de forma unui semicerc si din motive de simetrie este doar jumătate din inductia produsă de o spiră în centrul ei</p>	<p>1</p>	
<p>Oficiu</p>		<p>1</p>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Subject 3	Parțial	Punctaj
2. Barem subiect 3		10
<p>a) Firul se alungește uniform în raport cu lungimea lui astfel încât distanța x dintre două puncte crește la fel în timpul Δt oricare ar fi cele două puncte.</p> $\Delta x = \frac{\ell - \ell_0}{n} ; v_1 = \frac{\ell - \ell_0}{n \cdot \Delta t}$ $v_n = \frac{\ell - \ell_0}{\Delta t} ; \frac{v_n}{v_1} = n$	1	1
<p>b) Asupra corpului care are poziția i acționează greutatea acestuia și forțele elastice ale celor două resorturi cu care interacționează:</p> $\frac{m}{N} a_i = \frac{m}{N} g + F_{i+1} - F_i$ $\frac{m}{N} a_i = \frac{m}{N} g + Nk[y_{i+1}(x,t) - y_i(x,t) - \frac{\ell}{N}] - Nk[y_i(x,t) - y_{i-1}(x,t) - \frac{\ell}{N}]$	1	1
<p>c) Soluția ecuației precedente este de forma $y(x,t) = y_0(x) + A(x)\cos(\omega t)$ $y_0(x)$ reprezintă coordonata corpului i în starea de echilibru mecanic La echilibru mecanic $a_0 = 0$ rezultă $g = -\frac{k\ell^2}{m} y_0''(x)$ Din $y(x,t) = y_0(x) + A(x)\cos(\omega t)$ rezultă $y''(t) = y_0''(t) - \omega^2 A(x)\cos(\omega t)$ Substituind soluția în ecuația $a_i = g + \frac{k\ell^2}{m} y_i''(x,t)$ și ținând seama de condițiile găsite pentru starea de echilibru mecanic: $y_0''(t) = 0$ și $g = -\frac{k\ell^2}{m} y_0''(x)$ rezultă</p> $-\omega^2 A(x)\cos(\omega t) = -\frac{k\ell^2}{m} y_0''(x) + \frac{k\ell^2}{m} y_i''(x) \text{ rezulta}$ $-\omega^2 A(x)\cos(\omega t) = -\frac{k\ell^2}{m} y_0''(x) + \frac{k\ell^2}{m} A_i''(x)\cos(\omega t) + \frac{k\ell^2}{m} y_0''(x) \text{ rezultă}$ $\omega^2 A(x) + \frac{k\ell^2}{m} A''(x) = 0$ <p>Observație: Se va considera suficient, acordând punctajul maxim și dacă se scrie: $y(x,t) = y_0(x) + A(x)\cos(\omega t)$ $a_i = -\omega^2 A(x)\cos(\omega t)$ $y''(x,t) = A''(x)\cos(\omega t) + y_0''(x)$ și înlocuind în ecuația din enunț rezultă</p> $\omega^2 A(x) + \frac{k\ell^2}{m} A''(x) = 0 \text{ și } g + \frac{k\ell^2}{m} y_0''(x) = 0$	1	2

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Pagina 6 din 6

<p>d) Asupra corpului N, cuplat cu corpul de masă M acționează greutatea și forța elastică a resortului N:</p> $\left(\frac{m}{N} + M\right)a_i = \frac{m}{N}g + Mg - Nk[y_N(x,t) - y_{N-1}(x,t) - \frac{\ell}{N}]$ $Ma_i + \frac{m}{N}a_i = Mg + \frac{m}{N}g - k\ell y'_N(x) + k\frac{\ell^2}{N}y''_N(x) + k\ell$ <p>Cum $a_i = g + \frac{k\ell^2}{m}y''_i(x,t)$ rezultă $\frac{m}{N}a_i = \frac{m}{N}g + \frac{k\ell^2}{N}y''_i(x)$ pentru orice i rezulta: $Ma_N = Mg - k\ell y'_N(x) + k\ell$ Substituind soluția $y(x,t) = y_0(x) + A(x)\cos(\omega t)$ în ecuația precedentă rezultă:</p> $-\omega^2 A(x)\cos(\omega t) = g - \frac{k\ell}{M}y'_0(x) - \frac{k\ell}{M}A'(x)\cos(\omega t) + \frac{k\ell}{M}$ <p>În poziția de echilibru la $x = \ell$ rezultă $0 = g - \frac{k\ell}{M}y'_0(\ell) + \frac{k\ell}{M}$ Pentru $x = \ell$ și la $t = 0$ rezultă</p> $-\omega^2 A(\ell) = g - \frac{k\ell}{M}y'_0(\ell) + \frac{k\ell}{M} - \frac{k\ell}{M}A'(\ell) \Rightarrow \omega^2 A(\ell) = \frac{k\ell}{M}A'(\ell)$	<p>1</p> <p>2</p> <p>1</p>	<p>2</p>
<p>e) $A(x) = C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{k}} \frac{1}{\ell} \cdot x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{k}} \frac{1}{\ell} \cdot x\right)$ $A(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ deoarece capătul fixat nu oscilează $A(\ell) = C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{k}} \frac{1}{\ell} \cdot \ell\right)$ și $\omega^2 A(x) = \frac{k\ell}{M}A'(x)$ rezultă</p> $\sqrt{\frac{m}{k}}\omega \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\omega\right) = \frac{m}{M}$ <p>$\frac{m}{M} \ll 1$ rezultă $\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{m}{k}}\omega\right) = \sqrt{\frac{m}{k}}\omega + \frac{1}{3} \frac{m}{k} \sqrt{\frac{m}{k}}\omega^3$ rezultă</p> $\frac{m}{k}\omega^2\left(1 + \frac{1}{3} \frac{m}{k}\omega^2\right) = \frac{m}{M}$ <p>Rezolvând ecuația bipătrată în ω^2 se obține soluția $\omega^2 = \frac{k}{M}\left(1 - \frac{1}{3} \frac{m}{M}\right)$ Alternativ, deoarece $\frac{m}{k}$ foarte mic rezultă $\frac{1}{1 - \frac{1}{3} \frac{m}{M}\omega^2} \approx 1 + \frac{1}{3} \frac{m}{k}\omega^2$</p> <p>Inlocuind rezultă $\omega^2 = \frac{k}{M}\left(1 - \frac{1}{3} \frac{m}{M}\right)$</p>	<p>1</p> <p>1</p> <p>1</p>	<p>3</p>
<p>Oficiu</p>		<p>1</p>

Barem propus de:

Prof. Cristinel Miron, Colegiul Național "Emil Racoviță", Iași
 Prof. Marian Viorel Anghel, Liceul Teoretic "Petre Pandrea", Balș
 Prof. Victor Stoica, Inspectoratul Școlar al Municipiului București

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.